

Tous les documents sont interdits. Toutes les utilisations de dispositifs électroniques sont interdites, sauf pour télécharger et imprimer ce sujet, numériser son travail et le déposer sur Moodle.

Les réponses aux questions doivent être rédigées **à la main**, sur des feuilles au format A4 portant le nom et le prénom de l'étudiant.e. Ces feuilles doivent être numérisées au format PDF ou JPEG, par scan ou photographie, et déposées sur Moodle dans le devoir prévu à cet effet, avant 17h15 (heure de Paris).

L'examen dure bien 3 heures, de 14h à 17h. La plage horaire de 17h à 17h15 n'est réservée qu'à la numérisation de vos travaux et à leur dépôt sur Moodle. Pour les étudiants disposant d'un tiers-temps, l'examen est prolongé jusqu'à 18h et le dépôt Moodle reste ouvert jusqu'à 18h15.

Exercice 1 : Preuve dans le système LP (4 points)

Le système formel LP est composé des axiomes suivants et de la règle de modus ponens, supposée connue :

Axiome 1 : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

Axiome 2 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Axiome 3 : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P \wedge Q)$

Axiome 4 : $P \wedge Q \Rightarrow P$

Axiome 5 : $P \wedge Q \Rightarrow Q$

Axiome 6 : $P \Rightarrow P \vee Q$

Axiome 7 : $Q \Rightarrow P \vee Q$

Axiome 8 : $(P \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \vee Q \Rightarrow R))$

Axiome 9 : $\neg\neg P \Rightarrow P$

Axiome 10 : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg P)$

Présenter sous forme de tableau une preuve formelle de $\neg A \Rightarrow B, \neg B \vdash A$ dans le système LP.

Exercice 2 : Résolution propositionnelle (5 points)

- Définir toutes les variables propositionnelles utiles pour formaliser les énoncés suivants :
 - Quand un étudiant résout un exercice sans soupirer, c'est qu'il le comprend.
 - Ces exercices ne sont pas sous une forme habituelle.
 - Les exercices faciles ne donnent pas mal à la tête.
 - Les étudiants ne comprennent pas les exercices qui ne sont pas sous une forme habituelle.
 - Un étudiant ne soupire jamais devant un exercice, sauf s'il lui donne mal à la tête.
- En utilisant ces variables, traduire séparément chacun de ces énoncés en une formule propositionnelle.
- Appliquez la méthode de résolution propositionnelle, de manière détaillée, pour décider si la conjonction de ces énoncés est contradictoire ou non. **Attention : l'application de toute autre méthode de raisonnement est exclue. Elle ne rapporterait aucun point.**

Exercice 3 : Formalisation en logique des prédicats (3 points)

Dans cet exercice, on désigne par 0 et 1 les deux premiers entiers naturels, on désigne par + et \times l'addition et la multiplication de deux entiers naturels, et on désigne par = et \leq l'égalité et la relation d'ordre entre les entiers naturels.

En utilisant ces symboles et les notations de la logique des prédicats, formaliser les propriétés suivantes :

1. Il n'existe pas de plus grand entier.
2. Certains entiers sont des nombres pairs.
3. Certains entiers n'ont pas de racine carrée entière.

Exercice 4 : Associativité de l'addition (3 points)

Le type inductif \mathbb{N} des entiers naturels est défini par les règles

$$\frac{}{0 : \mathbb{N}} (\mathbb{N}_0) \quad \text{et} \quad \frac{n : \mathbb{N}}{S(n) : \mathbb{N}} (\mathbb{N}_S)$$

où $S(n)$ désigne le successeur de n , c'est-à-dire $n + 1$. L'addition de deux entiers naturels est calculée par la fonction *plus* définie par les égalités suivantes :

$$\text{plus}(x, 0) = x \tag{1}$$

$$\text{plus}(x, S(i)) = S(\text{plus}(x, i)) \tag{2}$$

Prouver formellement, par induction sur c , la propriété

$$\text{plus}(a, \text{plus}(b, c)) = \text{plus}(\text{plus}(a, b), c)$$

d'associativité de l'addition, pour tous les entiers naturels a , b et c , **en détaillant chaque étape, et en indiquant le numéro de l'égalité utilisée dans chaque étape.**

Exercice 5 : Types et calculs inductifs (5 points)

1. Les constructeurs *Nil* et *Cons* du type inductif $\text{liste}(\alpha)$ des listes dont tous les éléments sont de type α peuvent être considérés comme des fonctions.

Donner leur type en tant que fonctions.

2. Expliquer clairement et simplement pourquoi il n'est pas possible de définir une fonction de type $\text{liste}(\alpha) \rightarrow \alpha$, qui calculerait le premier élément de toute liste.
3. Pour tout type α , le type inductif $\text{option}(\alpha)$ est défini par les règles

$$\frac{}{\text{None} : \text{option}(\alpha)} (o_0) \quad \text{et} \quad \frac{x : \alpha}{\text{Some}(x) : \text{option}(\alpha)} (o_S).$$

Avec la définition du type \mathbb{N} donnée plus haut dans ce sujet, démontrer formellement que l'expression $\text{Some}(S(0))$ est de type $\text{option}(\mathbb{N})$.

4. Définir une fonction

$$\text{fst} : \text{liste}(\alpha) \rightarrow \text{option}(\alpha) \tag{3}$$

qui retourne *None* pour la liste vide, et sinon calcule le premier élément de toute liste non vide, et le convertit en un habitant du type $\text{option}(\alpha)$ à l'aide du constructeur *Some*.

5. On rappelle la règle suivante d'inférence et de vérification de type :

$$\frac{f : \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n \rightarrow \beta, e_1 : \alpha_1, \dots, e_n : \alpha_n}{f(e_1, \dots, e_n) : \beta} \quad (\text{application})$$

Avec l'hypothèse

$$(H_=) \quad = : \alpha \times \alpha \rightarrow \mathbb{B}$$

sur le type de l'égalité, avec toutes les règles dans cet énoncé et avec d'éventuelles hypothèses supplémentaires, donner une preuve formelle par arbre que chaque égalité de votre réponse à la question 4 a le type \mathbb{B} . **Indiquer les hypothèses supplémentaires nécessaires pour que ces preuves soient complètes.**